### Лекция 3 «Экстремумы функции двух переменных»

### *§* 1 Экстремум функции двух переменных (максимум и минимум)

Пусть функция  определена в некоторой области *D*, точка .

*Опр. 1* Точка  называется ***точкой максимума***функции , если существует такая *δ*-окрестность точки , что для каждой точки , отличной от точки , из этой окрестности выполняется неравенство .

*Опр.2* Точка  называется ***точкой минимума*** функции , если существует такая *δ*-окрестность точки , что для каждой точки , отличной от точки , из этой окрестности выполняется неравенство .

•

•

•

•

•

•

•

•

•

*x*

*z*

*y*

*N*1

*N*2

*f(x*0*;y*0*) f(x;y)*

Рисунок 1

На рисунке 1:

*N*1 – точка минимума, а *N*2– точка максимума функции .

Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом* (*минимумом*)** функции, или ***экстремумами*** функции.

На практике максимум и минимум функции находят с помощью необходимого и достаточного условий существования экстремума.

***Теорема 1 (необходимое условие экстремума функции).***

*Если дифференцируемая функция  имеет экстремум в точке , то ее частные производные в этой точке равны нулю: .*

***Критическими* *точками*** функции называются внутренние точки области определения, в которых частные производные первого порядка равны нулю или хотя бы одна из частных производных не существует.

Однако не любая критическая точка будет экстремумом функции. Примером, подтверждающим этот факт, может служить точка для функции , которая является критической точкой, но не является экстремумом функции. Поэтому среди критических точек точки экстремума функции выявляют с помощью ***достаточного условия***.

***Теорема 2(достаточное условие экстремума функции)***.

*Пусть в критической точке  и некоторой ее окрестности функция  имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке  значения   . Обозначим .*

*Тогда: 1) если  то функция в точке  имеет экстремум: максимум, если А<0; минимум, если A>0; 2) если  то функция в точке  экстремума не имеет.*

*Замечание.* В случае  экстремум в точке  может быть, а может не быть. Необходимо дополнительное исследование.

План нахождения экстремумов функции:

* 1. найти критические точки функции ;
  2. найти значение определителя  для каждой из критических точек;
  3. в соответствии с достаточным условием экстремума сделать вывод о наличии в ней экстремума и найти его значение.

*Пример.* Найти экстремум функции .

*Решение.* 1) ; . Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем точки, в которых они равны нулю, решая систему уравнений: .

Получаем следующие точки: .

2) Находим частные производные второго порядка: , .

В точке  имеем: *A=*0*, B=*3*, C=*0*,* тогда , т.е. .

В точке  имеем: *A=6, B=3, C=6,* тогда , т.е. .

3) В точке  экстремума нет.

 – точка минимума (*A=6>0*), .

### *§ 2* *Условный экстремум функции двух переменных*

Иногда на практике возникает задача нахождения экстремума функции двух переменных *x* и *y* в случае, когда эти переменные не являются независимыми друг от друга. Соотношение между ними описывается уравнением , которое называется ***уравнением связи***. Такая задача нахождения экстремума функции  при условии, что *x* и *y* удовлетворяют уравнению связи , и носит название задачи ***нахождения условного экстремума***.

*Опр.* Точка  называется ***точкой условного максимума (условного минимума)***функции , при условии , если существует такая *δ*-окрестность точки что для каждой точки , отличной от точки , координаты которой удовлетворяют уравнению , из этой окрестности выполняется неравенство  ().

Существует два способа решения этой задачи.

Первый способ.

Если уравнение  разрешимо относительно одной из переменных *x* или *y*, тогда из уравнения связи выражают одну переменную через другую и подставляют найденное выражение в функцию . В результате получают функцию *z* одной переменной *x* или *y* и исследуют ее на экстремум.

Второй способ (является универсальным)

Составляют так называемую ***функцию Лагранжа***: , где λ – вспомогательный множитель.

Верна следующая теорема.

***Теорема.***  *Если точка*  *является точкой условного экстремума функции при условии , то существует единственное значение λ0, такое, что точка является точкой экстремума функции.*

Для отыскания условных экстремумов данным способом сначала находят критические точки функции Лагранжа, решая систему уравнений:

.

Определить вид экстремума в найденных критических точках можно следующим способом. Для каждой из критических точек составляем определитель:

, где  – координаты критической точки. Если , то в точкеусловный максимум. Если , то в точке  условный минимум.

*Замечание.* Это один из способов определения вида экстремума. Существуют и другие, познакомиться с которыми можно в соответствующей литературе.

*Пример.* Найти условный экстремум функции , если .

Уравнение связи  не может быть разрешено однозначно относительно переменной *x* или *y*. Преобразуем его: .

Составим функцию Лагранжа: .

Найдем частные производные первого порядка функции : , , .

Решая систему уравнений , находим критические точки , .

Определим вид экстремумов.

Сначала находим частные производные первого порядка функции  и частные производные второго порядка функции Лагранжа :

.

Тогда

>0;.

Значит,  – условный минимум,  – условный максимум.

### *§ 3 Наибольшее и наименьшее значения функции*

Пусть функция  определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области *D*. Тогда она достигает в некоторых точках области *D* своего наибольшего и наименьшего значений (*глобальные экстремумы)*. Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области *D*. Или в точках, лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области *D*.функции .

1. Найти критические точки функции, принадлежащие области *D* и вычислить значение функции в них.
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на границах области *D*.
3. Сравнить все найденные значения и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

*Пример.* Найти наибольшее и наименьшее значение функции  в замкнутой области, ограниченной линиями 

1. Изображаем область *D*.
2. Находим критические точки функции, решая систему

 

Из четырех полученных точек ни одна не принадлежит области *D.*

3) Исследуем функцию на границах области *D*.

АВ: Исследуем полученную функцию на наибольшее и наименьшее значения:



ВС: Исследуем полученную функцию на наибольшее и наименьшее значения:



СЕ: Исследуем полученную функцию на наибольшее и наименьшее значения



АЕ: Исследуем полученную функцию на наибольшее и наименьшее значения:



Сравнивая полученные результаты, получаем:

Наименьшее значение функции 

Наибольшее значение функции 

Ответ: 

Литература:

1. Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 9, параграф 46,
2. Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», глава 15 п. 15.4,15.6-15.8